

ÖLÇME TEKNİĞİ

ÖLÇÜM SONUÇLARININ ANALİZİ-II

Ders Öğretim Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi. Nilhan ÜRKMEZ TAŞKIN

Ders Kitabı

- **ÖLÇME TEKNİĞİ**, Prof. Dr. Tezcan Şekercioğlu, Birsen yayınevi.

Yardımcı Kaynaklar

- **METROLOJİ, 1. BASIM, ŞUBAT 2013 , TÜBİTAK ULUSAL METROLOJİ ENSTİTÜSÜ**
- **ÖLÇME TEKNİĞİ (Boyut, Basınç, Akış ve Sıcaklık Ölçmeleri)**, Prof. Dr. Osman GENCELİ, Birsen yayınevi.

- Yapılan her ölçümün sonucunu aynı bulmak hemen hemen imkansızdır.
- Ölçü hataları dediğimiz bu farklar, ölçüyü yapan kişi tarafından meydana gelebileceği gibi, ölçü aletlerinin hatalı olmasından ve atmosferik şartlardan da meydana gelebilir.

Ölçüm	Sonuç
1	27,12
2	27,04
3	26,85
4	27,08

- Yapılan ölçümler bir projeye esas teşkil edeceği ya da hukuki durumun belirtilmesinde kullanılacağı gibi temel bir araştırma, deneysel araştırma ya da deneysel geliştirme gibi Ar-Ge çalışmalarını yönlendirecek öneme sahip olabilir bunun için mümkün olan (olması gereken) hassasiyette yapılması gerekir.
- Bu amaçla hataların belirlenip giderilebilenlerin giderilmesi, giderilemeyeceklerin de ölçüye etkisinin en aza indirilmesi ya da belirli sınırlar içinde tutulması gerekir.

Ölçme işlerinde karşılaşılan hataların tanımlanması ve belirlenmesi son derece önemlidir.

Ölçme hatalarını etkileyen faktörler

1. Ölçme ortamı:

- Ortamın sıcaklığı
- Ortamın basıncı
- Ortamın nem oranı
- Ortamın gürültü
- Titreşim veya Rezonans

2. Ölçme aleti

- Üretim hataları
- Tasarım sınırlaması (Cihazın tasarımında sürtünme ve çözülme gibi bazı kaçınılmaz faktörler ölçümlerde belirsizliğe yol açar.)
- Deformasyon
- Tepki süresi (Bir okuma için cihaz tarafından harcanan süre)
- İletim (birincil algılama elemanından göstergeye bilgilerin iletimi sırasında)
- Sinyalde, herhangi bir nedenden ötürü zayıflama olması (Sızıntı/kaçak nedeniyle veya İletişim kanalında emilerek tüketilmesi)
- Ölçüm sisteminin bozulması: Ölçüm sisteminde meydana gelen bozulma (Gevşeme yoluyla devre elemanının direncindeki değişiklik, Kalıcı bir mıknatısın zayıflaması v.b.)

3. Ölçülen özellik:

- Yüzeydeki geometrik özellikler (yüzey^{7.} pürüzlülüğü, dairesellik vb.)
- Büyüklüğün sabit-stabil olmaması
- İşlem anında oluşan yapısal değişiklikler

Ölçülen özelliğin tam olarak tanımının yapılmamış olması • Ölçülecek özelliğin tümünün ölçülemeyişi gibi özellikler ölçmede hataya neden olabilir. • Çarpılmış, ölçme yüzeyi bozulmuş veya aşınmış ölçü aletlerinin ve birbirine uymayan standart mastarlarla blok setlerinden dolayı meydana gelen hatalardır. Örneğin, tek blok mastarıyla yapılabilecek ölçü kontrolü yerine aşınmış veya yüzey kalitesi bozulmuş birkaç blok mastarı bir araya getirilerek ölçü kontrolü yapılıyorsa, hiçbir zaman gerçeğe yakın ölçü kontrolü yapılmayacaktır. Böylece, amaca uymayan ölçü aleti hataya sebep olacaktır.

4. Ölçümü yapan kişiye bağlı hatalar (gözlem ve yorum hataları)

- Eğitimi
- Okuma hatası
- Tecrübesi
- Dikkati
- Yeteneği

Ölçme hatasının çeşitleri

Genel olarak ölçme hataları üç grupta ifade edilebilir:

1. Dikkatsizlik ve Tecrübesizlikten kaynaklanan hatalar
2. Sabit ve Sistemik hatalar
3. Rastgele hatalar

Dikkatsizlik ve Tecrübesizlikten kaynaklanan hatalar

Ölçme cihazının yanlış seçiminden veya ölçme sistemlerinin yanlış dizaynından ortaya çıkan hatalar bu grupta incelenir.

Bu hatalar genellikle ölçülebilen diğer bulgulardan farklı karakterden olduğundan, tecrübeli bir deneyci tarafından kolaylıkla tespit edilerek, değerlendirme dışı bırakılabilir.

Örnek olarak olarak sıcaklık ölçen bir termometre normal sıcaklıktan aşağı bir değer ölçmesi durumunda kolaylıkla tespit edilebilir

Sabit ve Sistematik hatalar

Düzenli hatalar ölçüyü aynı yönde ve aynı miktarda etkileyen küçük hatalardır. Ölçüler ne kadar tekrar edilirse sistematik hata aynı kalır. Bunlarda genel olarak tekrar edilen okumalarda görülen ve nedenleri çoğunlukla bilinmeyen hatalardır. (Mesela bir termometrenin imalatından meydana gelen hata)

Sistem veya cihaz içi hataları, tekrarlı ölçmelerde sabit olan ve değişmeyen hatalardır. Bu hatalar; imalat esnasında fabrika yapım hataları, referans, ayar ve kalibrasyon hatalarıdır. Sistem veya cihaz içi hataları, cihazın mekanik ve elektriksel karakteristiklerinden de meydana gelir.

Bunlar sürtünme, histerezis ve çeşitli lineersizliklerdir.

Bu hataların olmaması veya azaltılması için; cihazın uygun standartları ile sık sık kalibrasyonunun yapılması gerekir.

Rastlantı hataları: Belirsiz nedenlerden dolayı ortaya çıkan hatalardır.

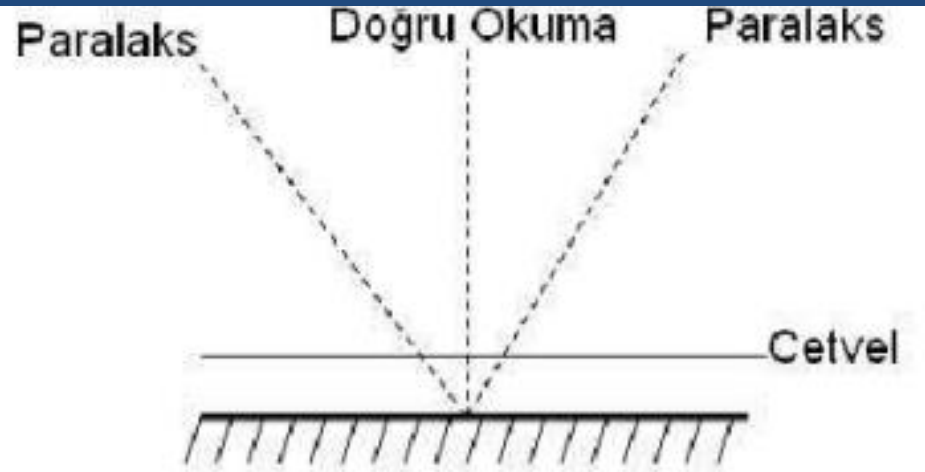
İnsan ve dış kaynaklı hatalar olmak üzere iki grup halinde toplanabilir. İnsan kaynaklı olanlar; yanlış okuma, yanlış skala seçimi, cihaz ayarının yanlış yapılması, yanlış uygulama ve hatalı hesaplama şeklinde özetlenebilir. Bunların nedeni; insanın bilgisizliği, psikolojik veya fiziksel yorgunluğu ve dikkatsizliği olabilir.

Bu hatalar insandan insana değişir. Yüksek sıcaklık, rutubet elektrik ve manyetik alan gibi dış etkilerden oluşan hatalar da bu sınıfa girer. Cihazın yanlış ve hatalı kullanılmasında doğan hatalarda bu sınıfta değerlendirilebilir. Bunları önlemek için; operatörün bilgili ve dikkatli olması, sonuçların kontrol edilmesi, dış etkilerden korunması ve cihazın uygun yerde kullanılması gerekir.

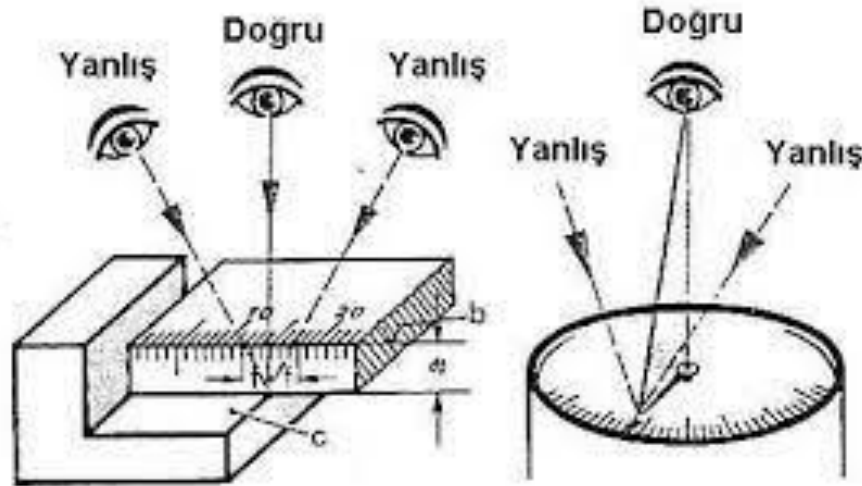
Bunların belirlenmesi oldukça zordur. Bunlar, istatistik yolla belirlenir.



Bir zincir parçasının uzunluğu ne kadardır?



Şekil 1 Paralaks hatası

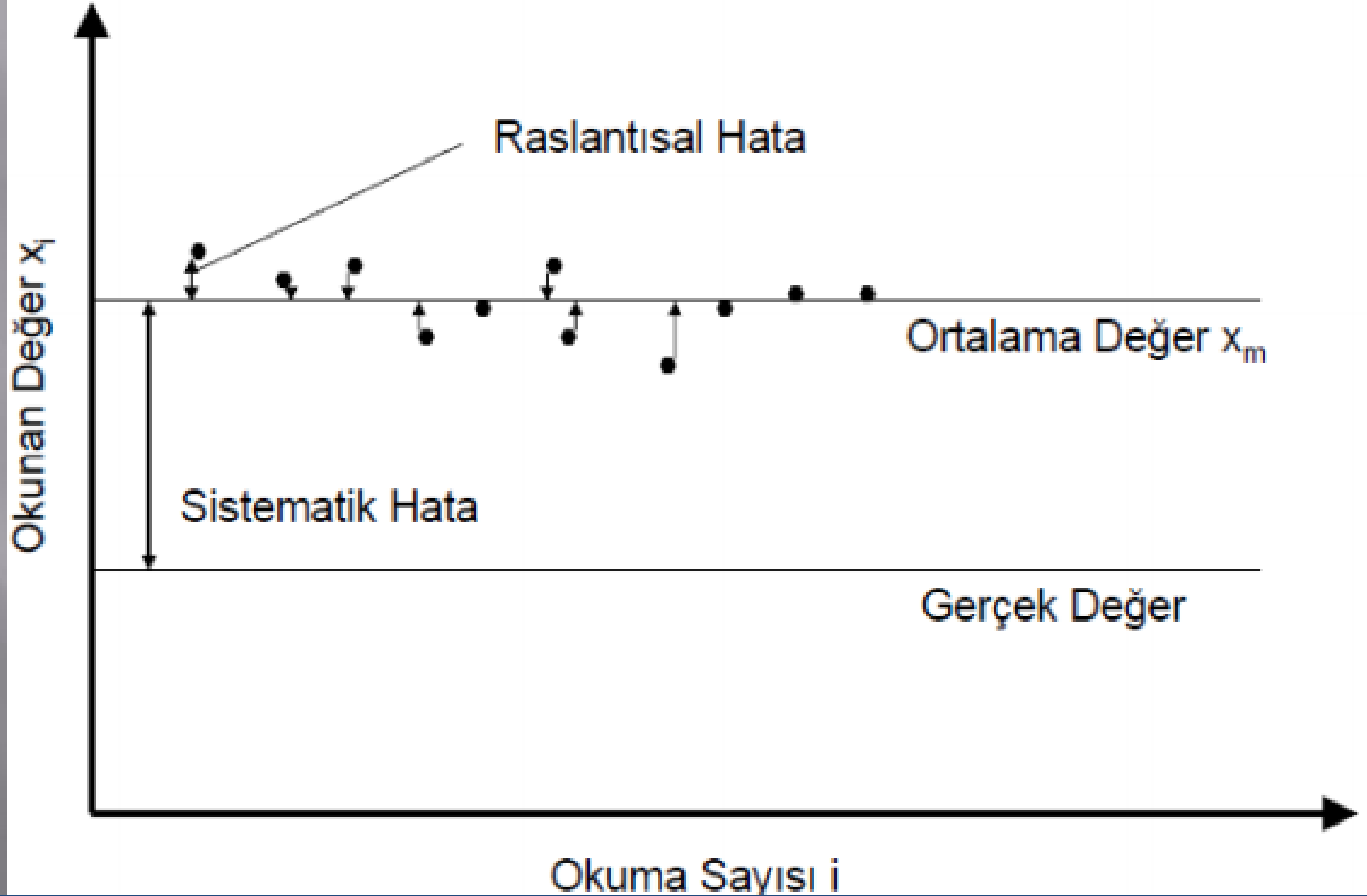


Bazı cihaz hataları

- a) Sıfır ayarı hatası: Ölçü aletinin sıfır ayarının hatalı olmasından kaynaklanır. Mesela bir voltmetrenin bütün ölçmelerde 0,5 volt az ölçme yapması sıfır ayarının hatalı olduğunu gösterir.
- b) Skala hatası: Bu hata ölçülecek olan isaretin genliğine bağlı olarak uygun kademelerin seçilmemesinden ve skalanın lineer olmamasından kaynaklanır. Skala lineer değilse, bunun düzeltilmesi veya düzeltilememesi her noktadaki hatanın ne olduğu tespit edilerek ölçü sonuçlarında göz önünde bulundurulması gerekir. Dijital aletlerde bu problem yoktur.
- c) Cevap zamanı hatası: Ölçülen büyüklüğün hızlı değişmesi ve cihazın bu değişimi takip edememesinden kaynaklanır. Bu hata ölçü aletinin mekanik ataletinden kaynaklanır.
- d) Yükleme hatası: Ölçü aleti devreye bağlandığında devreden bir enerji çeker. Örneğin; voltmetrenin direnci çok büyüktür ama sonsuz değildir veya ampermetrenin direnci çok küçüktür ama sıfır değildir. Bu nedenle bağlandığı devreden akım çeker ve devreye etki ederler.

e) Yapım hatası: Aletin yapımından kaynaklanan hatalar olup, imalatçılar, yapım hatasına göre ölçü aletlerini aşağıdaki çizelgede görüldüğü gibi 7 sınıfa ayırmışlardır. VDE (Alman standardı) standartlarına göre, bu sınıflarda çeşitli harflerle işaretlenir. Ölçü aletleri, bu isaretteki sınıfına göre sipariş edilir. (VDE 410) .

Elektrikli Ölçü Aletlerinin Hassasiyet Sınıfı VDE 0410							
	Hassas Aletler			İşletme Aletleri			
İsareti	E		F	G		H	
Sınıfı	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	2,5
Gösterme Hatası	± 0,1 %	± 0,2%	± 0,5 %	± 1 %	± 1,5 %	± 2,5 %	± 5 %



Sistematik Hatalar	Rastgele Hatalar
Doğası gereği tekrar eden, sabit ve benzer özellikte	Süreklilik göstermezler. Hatanın kaynağı rastgeledir.
Çalışma, işlem veya prosedürlerin uygulanması sırasında uygunsuz koşullardan meydana gelen hatalar	Ölçüm sisteminde ya da ölçüm cihazında kendiliğinden olabilir
Kişisel hatalar dışında, sistematik hatalar büyüklük ve değer açısından kontrol edilebilir özelliktedir	Bu hatalar, büyüklük veya değer şeklinde ölçülemez
Düzgün bir analizle, bu tip hatalar indirgenebilir veya tamamen yok edilebilir.	Bu hatalar, yok edilemez ancak elde edilen sonuçlar düzeltilebilir

Ölçümde hata, ölçülen değer ile ölçülen boyutun gerçek değeri arasındaki farktır.

Hata= ölçülen değer - gerçek değer

Ölçüm Sonuçları Nasıl Verilir?

Ölçümler sonucu elde edilen sayısal değerler, ancak ölçüm hataları ile birlikte verildikçe anlamlı olur.

Örneğin fiziksel bir x-niceliğinin (uzunluk, zaman, gerilim, elektrik akımı,...vb) bir x1 ölçümünü yapalım. x1 ölçümünün sonucu x-niceliğinin değerine belli bir yaklaşıklıkla yakın olacaktır.

İkinci bir x2 ölçümü yaparsak, bunun sonucunun x1 ölçümünün sonucundan biraz farklılaştığını görürüz. Çok sayıda ölçüm yaparsak her bir ölçüm için farklı değer elde ederiz. Buna göre x-niceliğinin gerçek değerini tam olarak belirlemeyi bekleyemeyiz.

Bunun yerine çok sayıda ölçüm alarak, ölçüm sonuçlarının nasıl bir dağılım gösterdiğine ve en çok hangi değer etrafında toplandığına bakabiliriz.

Ölçüm sonuçlarımızı;

$$\text{Ölçülen Değer} = \text{Ortalama Değer} \pm \text{Hata}$$

şeklinde ifade ederiz. Burada ortalama dediğimiz şey, ölçümlerin toplandığı sayısal değerdir.

a) Mutlak hata

Ölçmede, alette okunan değeri X_2 , aletin hakikî göstereceği değeri de X_1 ile ifade edersek bu iki değer arasındaki farka, mutlak (fark) hata denir.

$$MH = X_2 - X_1$$

Bu değer + veya - olabilir.

b) Bağıl Hata :

Mutlak hatanın ölçülen (nominal)değere bölünüp yüzle çarpılmasıyla tayin edilir.

$$BH = (\text{Mutlak hata} / X_2) \times 100$$

c) Konstrüksiyon (yapım) hatası (H) :

- Mutlak hatanın, alet kadranındaki maksimum (X_{max}) degere, bölünmesi ile bulunur. Yani,

$$H = [(X_1 - X_2) / X_{max}] \times 100$$

ÖRNEK: 50 A'lik bir ampermetre 0,5 sınıfı ise, bu aletle ölçme yapılırken gösterdiği değer, gerçek değerden en çok ve en az ne kadar mutlak hata yapar?

$$H = \pm \% 0,5$$

$$X_{max} = 50 \text{ A}$$

$$MH = ?$$

$$\pm \% H = (HM / X_{max}) \times 100$$

$$MH = \pm \% H \cdot X_{max} = \pm \% 0,5 \cdot 50 = \pm 0,25$$

Hesaplanan bu değere göre, aletle okunan değer, gerçek değerden en çok 0,25 A eksik veya fazla ölçülmüş demektir. Yani 50 A'lik ölçü aleti ile 20 A'lik bir akım ölçülürse, ölçü aleti $20 \pm 0,25 = 19,75 \text{ A}$ ile $20,25 \text{ A}$ arasında bir değer gösterir.

Örneğin,

$$\rho_{su,ölçülen} = 999,96 \text{ kg/m}^3 \quad \text{Mutlak Hata} = |999,96 - 1000| \text{ kg/m}^3 = 0,04 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{su,gerçek(nominal)} = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad \text{Bağıl Hata} = \text{Mutlak Hata} / \text{Gerçek Değer} = 0,04 \text{ kg/m}^3 / 1000 \text{ kg/m}^3 = 4 \times 10^{-5} = \% ,004 = 40 \text{ ppm}$$

Hata Tespitleri ve Çözömlenmesi

Belirli sayıda deney yapıldıktan sonra bu deneye ait sistematik (veya sabit) hataların tespiti için pratikte birkaç yöntem geliştirilmiştir.

- Akılcı Yaklaşım (Commonsense Basis)
- Belirsizlik Analizi (Uncertainty Analysis)

1. Akılcı Yaklaşım Bu tip hata analizinde ölçme sisteminde bulunan bütün aletlerin azami hataları yaptığı kabul edilir

Örnek : Elektriksel güç hesabında $P = E \times I$ formülü kullanılır. Yapılan ölçümlere göre;

$E = 100 \text{ V} \pm 2\text{V}$, $I = 10 \text{ A} \pm 0.2 \text{ A}$ ise elektriksel gücün belirsizliğini akılcı yaklaşıma göre bulalım.

Örnekteki ölçülen değerlerin azami hata yaptığı kabul edilirse;

$$E_{\min} = 98 \text{ V} ; E_{\max} = 102 \text{ V}$$

$$I_{\min} = 9.8 \text{ A} ; I_{\max} = 10.2 \text{ A olur;}$$

Bu durumda elektriksel güç;

$$P_{\min} = E \times I = (98 \text{ V}) \times (9.8 \text{ A}) = 960.4 \text{ W}$$

$$P_{\max} = E \times I = (102 \text{ V}) \times (10.2 \text{ A}) = 1040.4 \text{ W}$$

$$P_{\max} - P_{\min} = 80 \text{ W}$$

Normalde olması gereken $P = 1000 \text{ W}$

$$P = 1000 \text{ W} (+\%4.04, -\%3.96)$$

Toplamda %8 belirsizlik

Belki hiçbir zaman her iki değerde de max hata oluşma imkanı olmayacaktır.

2. Belirsizlik (Uncertainty) Analizi

Belirsizlik analizi, sonuçların hassasiyeti hakkında yöntemsel bir yaklaşım sunar. Bu yaklaşım ile olası hatalar için bir aralık belirlenmektedir. Belirsizlik analizi diğer analizlere göre belirgin bir üstünlüğü, en büyük hataya neden olan değişkenin hemen tespit edilebilmesidir.

İki çeşit belirsizlik analizi yöntemi kullanılmaktadır.
Bunlar :

ANSI/ASME International's PTC 19.1 Test Uncertainty

ISO "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" (ISO GUM)

Belirsizlik Analizi Hesabı

- n adet bağımsız değişkeni olan bir ölçümede
- R : Ölçülecek boyut
- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: ölçümü etkileyen değişkenler
- $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$: bağımsız değişkenle ilgili hata oranı ise
- Toplam hata oranı W_R ;

$$W_R = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} w_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} w_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} w_3 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} w_n \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

veya

$$\frac{W_R}{R} = \left[\left(\frac{w_{x_1}}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{w_{x_2}}{x_2} \right)^2 + \left(\frac{w_{x_3}}{x_3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{w_{x_n}}{x_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Örnek: Önceki örnek problemdeki verileri kullanarak belirsizlik analizinin kullanılması durumunda gücün tespitinde yapılacak hata miktarını yüzdesel olarak tespit ediniz. ($E = 100 \text{ V} \pm 2 \text{ V}$) ve ($I = 10 \text{ A} \pm 0,2 \text{ A}$)

Çözüm

Belirsizlik analizine göre çözüm:

$$P_N = (100)(10) = 1000 \text{ [W]}$$

$$w_P = \pm \left[\left(\frac{\partial P}{\partial E} w_E \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} w_I \right)^2 \right]^{1/2} \text{ şeklinde yazılabilir. Buna göre;}$$

$$\frac{\partial P}{\partial E} = I = 10 \text{ [A]} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial I} = E = 100 \text{ [V]} \text{ yazılabilir. Bu durumda;}$$

$$w_P = \pm \left[(I \cdot w_E)^2 + (E \cdot w_I)^2 \right]^{1/2} = \pm \left[(10 \cdot 2)^2 + (100 \cdot 0.2)^2 \right]^{1/2} \cong \pm 28.28427 \text{ [W]}$$

$$\%w_P = \frac{w_P}{P} \cdot 100 \cong \frac{\pm 28.28427}{1000} \cdot 100 \cong \% \pm 2.82843 \text{ bulunur. Böylece; } P = 1000 \pm 28.28427 \text{ [W]}$$

Örnek Bir otomobilin belirli bir süre aralığındaki *ortalama hızı* ($v = x/t$) hesaplanmak istenmektedir. Buna göre; t söz konusu zaman aralığını, x de bu zaman aralığında alınan yolu göstermek üzere;

a) $x = 10$ [km] ve $t = 500$ [s] olarak verildiğine göre; bu otomobilin *ortalama hızının nominal değerini* (v_n) m/s cinsinden hesaplayınız.

b) $x = 10$ [km] \pm % 5 ve $t = 500 \pm 5$ [s] olarak verildiğine göre; *akılcı yaklaşımın* kullanılması durumunda, bu otomobilin *ortalama hızının hesaplanmasında* yapılacak hata miktarlarını *yüzdesele* olarak bulunuz.

c) Yukarıdaki veriler geçerli olmak üzere; *belirsizlik analizinin* kullanılması durumunda, bu otomobilin *ortalama hızının hesaplanmasında* yapılacak hata miktarını *yüzdesele* olarak bulunuz.

$$R = R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ ise; } w_R = \pm \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} w_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} w_{x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} w_{x_3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} w_{x_n} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ şeklindedir.}$$

Çözüm

a) Otomobilin ortalama hızının nominal değerinin bulunması:

$$x = 10 \text{ [km]} = 10000 \text{ [m]} \quad \text{ve} \quad t = 500 \text{ [s]} \Rightarrow v_n = \frac{x}{t} = \frac{10000}{500} = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ bulunur.}$$

b) Akılcı yaklaşıma göre çözüm: $x = 10 \text{ [km]} \pm \%5$ ve $t = 500 \pm 5 \text{ [s]}$ olarak verildiğinden;

$$w_x = \pm(10000)(0.05) = \pm 500 \text{ [m]} \quad \text{ve} \quad w_t = \pm 5 \text{ [s]} \text{ bulunur. Buna göre;}$$

$$v_{maks.} = \frac{x + w_x}{t - w_t} = \frac{10000 + 500}{500 - 5} \cong 21.21212 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ ve}$$

$$\% \text{ Hata } v_{maks.} = \frac{v_{maks.} - v_n}{v_n} \cdot 100 = \frac{21.21212 - 20}{20} \cdot 100 \cong \% + 6.06061 \text{ bulunur.}$$

$$v_{min.} = \frac{x - w_x}{t + w_t} = \frac{10000 - 500}{500 + 5} \cong 18.81188 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ ve}$$

$$\% \text{ Hata } v_{min.} = \frac{v_{min.} - v_n}{v} \cdot 100 = \frac{18.81188 - 20}{20} \cdot 100 \cong \% - 5.94059 \text{ bulunur.}$$

c) Belirsizlik analizine göre çözüm:

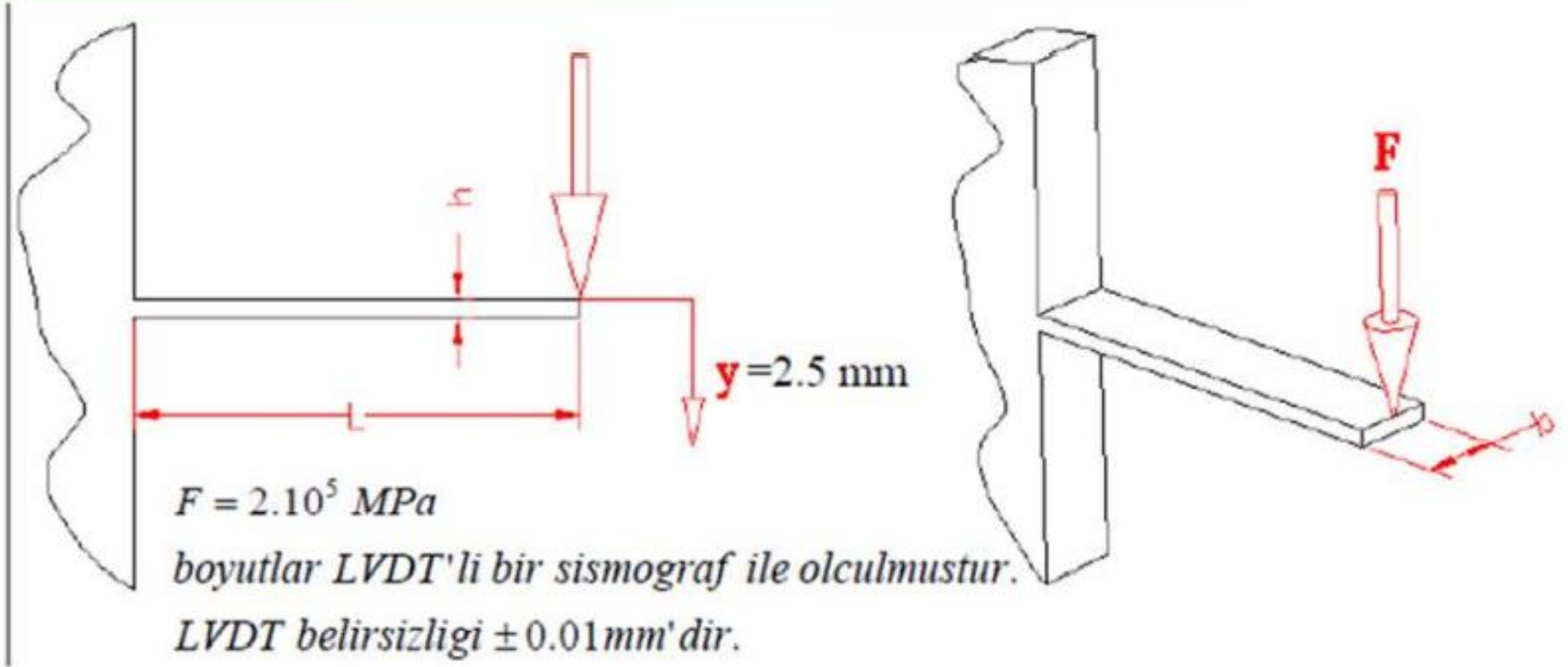
$v = \frac{x}{t}$ olduğundan; $w_v = \pm \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} w_x \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} w_t \right)^2 \right]^{1/2}$ şeklinde olacaktır. Buna göre;

$$w_v = \pm \left[\left(\frac{1}{t} w_x \right)^2 + \left(-\frac{x}{t^2} w_t \right)^2 \right]^{1/2} = \pm \left[\left(\frac{1}{500} (500) \right)^2 + \left(-\frac{10000}{500^2} (5) \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$w_v \cong \pm 1.01980 \left[\frac{m}{s} \right] \text{ ve}$$

$$\%w_v = \frac{w_v}{v_n} \cdot 100 = \frac{\pm 1.01980}{20} \cdot 100 \cong \% \pm 5.09902 \text{ bulunur.}$$

Örnek



$$b = 5 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$$

$$h = 1 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$$

$$L = 25 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm} \text{ ise}$$

F'in belirsizliği nedir?

LVDT; Linear Variable Differential Transformers

$$F = \frac{3Ebh^3}{12L^3} y$$

$$F = \frac{3 \cdot (2 \cdot 10^5) \cdot (0.005) \cdot (0.001)^3}{12 \cdot (0.025)^3} \cdot (0.0025) = 40 N$$

Kuvvet ölçümündeki belirsizlik

$$W_F = \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) w_b \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial h} \right) w_h \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) w_L \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) w_y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{W_F}{F} = \left[\left(\frac{w_b}{b} \right)^2 + 9 \left(\frac{w_h}{h} \right)^2 + 9 \left(\frac{w_L}{L} \right)^2 + \left(\frac{w_y}{y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{W_F}{F} = \left[\left(\frac{0.01}{5} \right)^2 + 9 \left(\frac{0.01}{1} \right)^2 + 9 \left(\frac{0.01}{25} \right)^2 + \left(\frac{0.01}{2.5} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

belirsizlik %3.04

Örnek

□ Bir devrede R elektrik direncindeki güç;

$P = E^2/R$ şeklinde gerilim ve direnç ölçülerek bulunmaktadır. P gücünün ölçülmesinde ortaya çıkan belirsizliği bulunuz. (R ve E'deki belirsizlikler %1 şeklinde gerçekleşmektedir.)

Çözüm: $\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}$, $\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}$

$$w_P = \left[\left(\frac{2E}{R} \right)^2 w_E^2 + \left(-\frac{E^2}{R^2} \right)^2 w_R^2 \right]^{1/2}$$

elde edilir. Buradaki bütün terimler $P = E^2 / R$ ile bölünürse,

$$\frac{w_P}{P} = \left[4 \left(\frac{w_E}{E} \right)^2 + \left(\frac{w_R}{R} \right)^2 \right]^{1/2} = [4(0.01)^2 + (0.01)^2]^{1/2}$$

= % 2.236 bulunur.

Deneysel Bulguların İstatistik Analizi

Bu kısımda özellikle deneysel bulguların analizi için kullanılan bazı tanımlar ile temel istatistik bilgiler verilecektir.

Bir ölçme aleti ile yapılan aynı bir fiziksel büyüklüğün ölçümleri aynı şahıs veya değişik şahıslar tarafından tekrarlandığında, bulunan değerler arasında farklılıklar görülür.

Örnek olarak; küre şeklindeki çelik bir bilyenin çapının, bir mikrometre ile yapılan bir kaç ölçümü farklı değerler verebilir. Deneyi yapan veya deneyin sonuçları ile ilgilenen kimse için, çoğunlukla bu değerlerin ortalaması önemlidir.

DeneySEL Bulguların İstatistik Analizi

Aritmetik Ortalama

Aynı bir fiziksel büyüklük için yapılan n adet ölçümün her biri x_i ise, x_m şeklinde tanımlanan

“aritmetik ortalama”: $x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ olarak verilir. Yani;

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	...

$$\Rightarrow x_m = \frac{x_T}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ olarak verilir.}$$

Deneysel Bulguların İstatistik Analizi

Sapma

Her bir ölçüm değerinin ortalama değerden farkı ise, “*sapma*” (*deflection, deviation*) olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$d_i = x_i - x_m \quad \text{yani}; \quad d_1 = x_1 - x_m \quad ; \quad d_2 = x_2 - x_m \quad ; \quad d_3 = x_3 - x_m \quad \dots \quad ; \quad \dots \quad d_n = x_n - x_m$$

Dikkat edilirse, bütün sapmaların toplamı ve aritmetik ortalaması sıfır değerindedir. Yani;

$$d_{i,T} = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_m) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_m = x_T - nx_m = x_T - x_T = 0 \quad \text{bulunur. Benzer şekilde;}$$

$$\bar{d}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_m = \frac{1}{n} x_T - \frac{1}{n} (nx_m) = x_m - x_m = 0 \quad \text{bulunur. Zaten;}$$

$$d_{i,T} = 0 \quad \text{olduğundan; } \bar{d}_i = \frac{d_{i,T}}{n} = 0 \quad \text{olacaktır.}$$

Sapmaların mutlak değerlerinin ortalaması ise;

$$|\bar{d}_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_m| \quad \text{şeklinde gösterilir. Bu değerın sıfır olma şartı yoktur.}$$

Deneyisel Bulguların İstatistik Analizi

Standart Sapma

Deneyisel bulguların, aritmetik ortalama değerden olan sapmalarının dağılımını gösteren bir büyüklük, “standart sapma” veya “sapmaların karelerinin karekökü” olan σ ’dır.

$$\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} \text{ şeklindedir.}$$

Varyans

Standart sapmanın karesi olan σ^2 ise, değişiklik (*varyans*) olarak adlandırılır.

Örnek Standart Sapma

Deneysel araştırma yapan araştırmacılar, her zaman yeteri kadar bulgu toplayamazlar. Deneysel bulguların uygun bir değerlendirilmesinin yapılabilmesi için yaklaşık olarak en az 20 (*yirmi*) adet ölçüm sonucu gereklidir. Bu değerden daha az sayıdaki ölçme halinde;

$\sigma_{\delta} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2}$ şeklinde verilen ve “*örnek standart sapma*” adını alan bir

büyüklik kullanılır. Görüldüğü gibi bu ifadede n yerine $n-1$ böleni kullanılmaktadır. Örnek sayısının artması halinde yukarıdaki σ ve σ_{δ} değerleri birbirine yaklaşmaktadır. Örnek sayısının sonsuza gitmesi halinde ($n \rightarrow \infty$ için) ise bu iki ifade aynı değeri vermektedir.

Örnek:

Bir ocaktan çıkan kömür numunelerinde yapılan nem ölçülmesinde aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Bu değerlere göre aritmetik ortalamayı, sapmaların mutlak ortalamasını, standart sapmayı, varyansı (değişikliği) ve örnek standart sapmayı bulunuz.

Numune	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nem (%)	11,2	9,3	12,3	9,2	11	14,1	8,9	9,7	10,3	10

Çözüm:

$$\text{Aritmetik ortalama : } X_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{10} (106) = 10,6 \text{ veya } \% 10,6$$

Hesaplanan aritmetik ortalama değerine göre aşağıdaki tablo hazırlanarak istenen değerler bulunabilir.

Numune	$d_i = X_i - X_m$	$(X_i - X_m)^2$
1	0,6	0,36
2	-1,3	1,69
3	1,7	2,89
4	-1,4	1,96
5	0,4	0,16
6	3,5	12,25
7	-1,7	2,89
8	-0,9	0,81
9	-0,3	0,09
10	-0,6	0,36

Sapmaların mutlak ortalaması : $|\bar{d}_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_m| = 1,24$ veya % 1,24

Standart sapma : $\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{10} (23,45) \right]^{1/2} = 1,53$ veya % 1,53

Varyans (Değişiklik) : $\sigma^2 = 2,35$

Örnek standart sapma : $\sigma_{\delta} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{9} (23,45) \right]^{1/2} = 1,61$

Örnek:

Aşağıdaki tablo fiziksel bir uzunluğun ölçüm sonuçlarını yansıtmaktadır. Ölçümlerin aritmetik ortalama değerini, sapmaların mutlak değerinin ortalamasını, standart sapmasını, varyansını ve örnek standart sapmasını bulunuz.

Okuma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i , cm	5.3	5.73	6.77	5.26	4.33	5.45	6.09	5.64	5.81	5.75

Çözüm:

$$\text{Aritmetik ortalama : } X_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{10} (56,13) = 5,613 \text{ cm}$$

Hesaplanan aritmetik ortalama değerine göre aşağıdaki tablo hazırlanarak istenen değerler bulunabilir.

Ölüm	$d_i = X_i - X_m$	$(X_i - X_m)^2$
1	-0,313	0,097969
2	0,117	0,013689
3	1,157	1,338649
4	-0,353	0,124609
5	-1,283	1,646089
6	-0,163	0,026569
7	0,477	0,227529
8	0,027	0,000729
9	0,197	0,038809
10	0,137	0,018769

Sapmaların mutlak ortalaması :
$$|\overline{d_i}| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_m| = 0,4224 \text{ cm}$$

Standart sapma : $\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{10} (3,533) \right]^{1/2} = 0,5944 \text{ cm}$

Varyans (Değişiklik) : $\sigma^2 = 0,3533 \text{ cm}^2$

Örnek standart sapma : $\sigma_{\sigma} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{9} (3,533) \right]^{1/2} = 0,6265 \text{ cm}$

Geometrik Ortalama

Oransal değişimin söz konusu olduğu biyolojik ve finansal olaylara “geometrik ortalama yöntemi” uygulanır. n adet ölçüm için geometrik ortalama;

$$x_g = [x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n]^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

Örnek : Bir malın değeri 1000 birim olup, her yılın sonundaki değışim oranları aşağıdaki gibidir. 4. yıl sonundaki (5. yıl başı) malın değeriindeki ortalama değışim oranını ve değeri kaç birim olduğunu hesaplayınız.

Yıl	Malın Değeri	Önceki Yıla Göre Değişim Oranı
1	1000 (A)	-
2	890	0.890
3	990	1.1124
4	1100	1.1111
5	1250	1.1364

Çözüm :

- Ortalama değişim oranı:

$$x_g = [x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5]^{1/4}$$

$$x_g = [(0.89) \cdot (1.1124) \cdot (1.1111) \cdot (1.1364)]^{1/4}$$

$$x_g = 1.0574$$

- 4. yıl sonundaki malın değeri:

$$A_g = A \cdot (x_g)^n = (1000) \cdot (1.0574)^4 = 1250 \text{ birim}$$

DİKKAT!!

Örnek çözümleri tekrarlayınız.

Dosyalar bölümüne yüklenen «makale- örnek hata analizi» dosyasını inceleyiniz.